KLASA:
URBROJ:
Zagreb,

IZVEDBENI PLAN ZA A.G. 2023./2024. POSLIJEDIPLOMSKOG SVEUČILIŠNOG STUDIJA MATEMATIKE NA PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOM FAKULTETU SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

Zagreb, 26. lipanj 2023.

SADRŽAJ

KOLEGIJI u a.g. 2023/2024

A. Osnovni kolegiji (dvosemestralni)

1. Zoran Vondraček, *Vjerojatnost*
2. Nenad Antonić, *Analiza*

3. Mladen Vuković i Vedran Čačić, *Matematička logika i računarstvo*
4. Josip Tambača i Boris Muha, *Parcijalne diferencijalne jednadžbe*
5. Luka Grubišić i Miljenko Marušić, *Numerička matematika*
6. Matija Bašić i Maja Resman, *Geometrija i topologija*
7. Dražen Adamović i Igor Ciganović, *Algebra*

B. Izborni kolegiji

1.Nikola Adžaga, Diofantske jednadžbe i Chabautyjeve metode (30 sati)
2.Bojan Basrak, Točkovni procesi (60 sati)
3.Nina Kamčev, Ekstremalna teorija grafova (60 sati)
4.Matija Kazalicki, Odabrane teme iz aritmetičke geometrije (30 sati)
5.Vjekoslav Kovač, Metoda Bellmanovih funkcije u analizi i vjerojatnosti (60 sati)
6.Slaven Kožić, Yangijani i njihove reprezentacije (30 sati)
7.Vedran Krčadinac, Asicijacijske sheme (60 sati)
8.Martin Lazar i Ivica Nakić, Upravljanje parcijalnim diferencijalnim jednadžbama (60 sati)
9.Matko Ljulj, Nelinearna elastičnost (60 sati)
10.Ivica Martinjak, Uvod u diskretnu geometriju (30 sati)
11.Rudi Mrazović, Vjerojatnosni modeli na rešetkama (60 sati)
12.Igor Pažanin, Nenewtonovski fluidi (60 sati)
13.Sonja Štimac, Kaotična dinamika na plohana (60 sati)

<table>
<tr><td colspan="3">NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</td></tr>
<tr><td colspan="3">SEMESTAR STUDIJA: 1.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NAZIV KOLEGIJA: Diofantske jednadžbe i Chabautyjeve metode</td></tr>
<tr><td>OBLIK NASTAVE</td><td>SATI TJEDNO</td><td>IZVOĐAČ NASTAVE</td></tr>
<tr><td>predavanja</td><td>2</td><td>Nikola Adžaga</td></tr>
<tr><td>vježbe</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>seminar</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ECTS BODOVI:</td></tr>
<tr><td colspan="3">CILJ KOLEGIJA: prikazati različite metode određivanja cjelobrojnih i racionalnih rješenja diofantskih jednadžbi i sustava</td></tr>
<tr><td colspan="3">NASTAVNI SADRŽAJI: Diofantske jednadžbe i aproksimacije (cjelobrojna rješenja). Pelovske jednadžbe i veza s kvadratnim poljima,</td></tr>
</table>

sustavi i (simultane) aproksimacije algebarskih brojeva, linearne forme u logaritmima. **Chabautyjeve metode (racionalna rješenja).** Klasična Chabauty-Coleman metoda. Colemanova integracija na hipereliptičkim krivuljama. Novije varijante Chabautyjeve metode.
OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: nema
UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: nema
NAČIN POLAGANJA ISPITA: Seminar
PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Poželjno je osnovno znanje: teorije brojeva (na razini preddiplomskog kolegija) i algebre (konačna i p-adska polja, grupe, polja algebarskih brojeva, ideali)
Andrej Dujella - Teorija brojeva, Školska knjiga, 2019.
Jennifer Sayaka Balakrishnan - Coleman Integration for Hyperelliptic Curves: Algorithms and Applications, doktorska disertacija, Massachusetts Institute of Technology, 2011. William McCallum & Bjorn Poonen - The method of Chabauty and Coleman u *Explicit methods in number theory*, volume 36 of Panor. Synthèses, pages 99–117. Soc. Math. France, Paris, 2012 **DOPUNSKA LITERATURA:** Jennifer S. Balakrishnan & J. Steffen Müller – Computational Tools for Quadratic Chabauty, lecture notes for 2020 Arizona Winter School Filip Najman – Aritmetička geometrija / Andrew Sutherland - Introduction to Arithmetic Geometry, Lecture Notes

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: zimski i ljetni 2023/24 (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Točkovni procesi		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	prof. dr. sc. Bojan Basrak
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		
CILJ KOLEGIJA: Kolegij će uvesti osnovne koncepte i modele teorije točkovnih procesa. Studenti će dobiti detaljan uvod u glavna matematička pitanja ove teorije, te naučiti vezu s primjenama u teoriji ekstremnih vrijednosti i drugim područjima slijedeći odabrane dijelove knjiga Chiu et al. et al. (2013), Kallenberg (2017), Last i Penrose (2017) te Resnick (2007). Studenti bi posebno trebali savladati metode kojima se proučava asimptotsko ponašanje nizova točkovnih procesa. **OPIS KOLEGIJA:** Točkovni procesi bitan su alat u raznim područjima, od analitičke teorije brojeva do biologije i financijske matematike. Omogućuju matematičko modeliranje nedeterminističkih točaka raspršenih u vremenu i prostoru. U teorijskoj matematici su usko vezani uz razdiobu vodećih		

prostih djelitelja nasumično odabranog prirodnog broja. U primjenama su točkovni procesi blisko povezani s proučavanjem ekstremnih opažanja u različitim okruženjima. Posebno se često koriste kao prirodni model za potrese i ekstremne vremenske prilike.

Predstavit ćemo kako se neki nedavni rezultati koji se tiču asimptotskog ponašanja vremenskih maksimuma u nizu, potencijalno zavisnih, opažanja mogu ukorijeniti u ovu elegantnu matematičku teoriju. Vidjet ćemo kako je ova teorija povezana s analitičkom teorijom regularno varirajućih distribucija. U dijelu kolegija ćemo diskutirati veze s teorijom brojeva, ali i statističke metode za analizu točkovnih procesa uz ilustraciju na simuliranim ili stvarnim skupovima podataka.

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Definicija točkovnih procesa i njihovih razdioba. Osnovni modeli (10 sati)
2. Poissonov proces na općenitom metričkom prostoru (10 sati)
3. Poissonov proces na skupu realnih brojeva (6 sati)
4. Palmove razdiobe točkovnih procesa. Stacionarnost i procjena (12 sati)
5. Konvergencija (12 sati)
6. Veza s teorijom ekstremnih vrijednosti odn. teorijom brojeva (10 sati)

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:

Pohađanje predavanja (uživo ili putem interneta), izrada domaćih zadaća i prezentacije.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Načini ocjenjivanja uključuju domaće zadaće, studentske prezentacije odn. usmeni ispit ovisno o broju i preferencama upisanih studenata.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Predmet zahtijeva poznavanje vjerojatnosti i teorije mjere na nivou diplomskog studija.

OBAVEZNA LITERATURA:

[1] Chiu, S.N., Stoyan, D., Kendall, W.S. and Mecke, J., 2013. *Stochastic Geometry and Its Applications*, Wiley.
[2] Kallenberg, O., 2017. *Random measures, theory and applications*, Springer.
[3] Last, G. and Penrose, M., 2017. *Lectures on the Poisson process*, Cambridge University Press.
[4] Resnick, S.I., 2007. *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*, Springer.

DOPUNSKA LITERATURA:

[5] Basrak, B., Planinić, H. and Soulier, P., 2018. An invariance principle for sums and record times of regularly varying stationary sequences. *Probability Theory and Related Fields*, 172, pp.869-914.
[6] Billingsley, P., 2013. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons.
[7] Kulik, R. and Soulier, P., 2020. *Heavy-tailed time series.* Berlin: Springer.
[8] Resnick, S.I., 2008. *Extreme values, regular variation, and point processes*. Springer.

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: dvosemestralni (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Ekstremalna teorija grafova		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	Nina Kamčev
vježbe		
seminar		
ECTS BODOVI:		
CILJ KOLEGIJA: Ekstremna teorija grafova bavi se pručavanjem najvećih ili najmanjih mogućih vrijednosti različitih parametara grafova pod određenim restrikcijama. Primjeri takvih izjava su "maksimalna gustoća grafa bez trokuta je 1/2" i "maksimalni kromatski broj svih planarnih grafova je 4". Poseban će naglasak biti na razumijevanju različitih metoda korištenih u dokazima središnjih rezultata kolegija. Konkretno, vjerojatnosne metode igraju ključnu ulogu u ekstremnoj teoriji grafova jer nam omogućuju da dokažemo postojanje grafova ili struktura sa specifičnim (često iznenađujućim) svojstvima, čak i ako ih ne možemo eksplicitno konstruirati.		

NASTAVNI SADRŽAJI:

Kolegij će pokrivati neka od sljedećih općih područja.
• Klasična ekstremalna teorija grafova: Teoremi Turána i Erdős-Stonea; problemi Turánovog tipa za bipartitne grafove; konstrukcije ekstremalnih grafova; metoda ovisnog slučajnog izbora. Ovisno o pozadini i interesima polaznika, mogu se pokriti osnove kao što su Diracov teorem i Mengerov teorem.
• Slučajne konstrukcije i vjerojatnosne metode
• Szemerédijeva lema o regularnosti: iskaz, dokaz i primjene; metoda stabilnosti.
• Spektralne metode u ekstremalnoj teoriji grafova
• Ekstremalna teorija skupova: teoremi Spernera, Bollobása, Erdős-Ko-Rado, Kruskal-Katona, Sauer-Shelah, s primjenama; metoda suncokreta; metode iz linearne algebre u ekstremalnoj teoriji skupova.

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: *Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća i seminara.*

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Prisustvo na barem 60% predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Seminari i / ili domaće zadaće.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Osnovni rezultati iz kombinatorike, linearna algebra i diskretna vjerojatnost.

OBAVEZNA LITERATURA:

1. N. Alon & J. H. Spencer, *The probabilistic Method*,Wiley, 3rd ed., 2008
2. B. Bollobás, *Extremal graph theory*, Academic Press, 1978
3. R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 3rd ed., 2005

DOPUNSKA LITERATURA:

1. M. Schacht, *Regularity Lemma and Applications*, online resource.

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: 2.		
NAZIV KOLEGIJA: Odabrane teme iz aritmetičke geometrije		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	Matija Kazalicki
vježbe	**0**	
seminar	**0**	
ECTS BODOVI:		

CILJ KOLEGIJA: Cilj kolegija je upoznati studente s modernim temama iz aritmetičke geometrije.
NASTAVNI SADRŽAJI: : Eliptičke krivulje. Galoisova kohomologija. Selmerove grupe i Tate-Shafarevicheve grupe. Visine. Dokaz Mordell Weilovog teorema za eliptičke krivulje. Slutnja o parnosti ranga i konačnost Tate-Shafarevicheve grupe. Cassels-Tateovo sparivanje. Kvadratni tvistovi krivulja genusa 1.
OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: nema
UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: nema
NAČIN POLAGANJA ISPITA: Seminar
PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Osnovno poznavanje algebarske teorije brojeva, algebre i aritmetike eliptičkih krivulja (na razini diplomskih kolegija)
LITERATURA: **J. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves** **T. Dokchitser, Notes on the Parity Conjecture** **T. Fisher, E.F. Shaefer, M. Stoll, The Yoga of the Cassels-Tate pairing**
DOPUNSKA LITERATURA:

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: zimski i ljetni 2023/24 (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Metoda Bellmanovih funkcija u analizi i vjerojatnosti		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		

CILJ KOLEGIJA:

Cilj kolegija je upoznati studente s tzv. tehnikom Bellmanovih funkcija, posebice kroz brojne primjere iz matematičke analize i teorije vjerojatnosti. Obradit će se veći dijelovi knjiga [1] i [2]. Preciznije, knjiga [1] će se koristiti za upoznavanje s osnovnom idejom, primjerima iz analize (npr. teoremi ulaganja, ocjene integralnih operatora) i trikovima za traženje Bellmanovih funkcija, dok će knjiga [2] komplementirati gradivo primjerima iz vjerojatnosti (npr. ocjene martingala). Matematičar koji ovlada ovom tehnikom znat će metodično pristupiti mnogim tipovima problema te može steći ogromnu prednost u rješavanju problema naspram većine znanstvenika koji metodu i dalje smatraju „mističnom“ ili pak misle da se do rješenja dolazi pukim pogađanjem.

OPIS KOLEGIJA:

Tehnika koju ćemo proučavati je jedna vrlo korisna ideja u teorijskoj matematici. Dobila je ime po primijenjenom matematičaru Richardu E. Bellmanu, koji je na nju utjecao svojim radom iz dinamičkog programiranja i stohastičkog optimalnog upravljanja. U teoriji vjerojatnosti ideju je prvi upotrijebio Donald L. Burkholder u 1980-im godinama pa se ona nekad zove i *Burkholderova metoda*. Metoda je primijenjena u matematičkoj analizi i dalje razvijena u sustavnu teoriju od strane Fedora L. Nazarova, Sergeia. R. Treila i Alexandera L. Volberga u čitavoj seriji knjiga i radova od kraja 1990-ih godina do danas. Isti su ljudi i skovali termin *metoda Bellmanovih funkcija*. Ona se koristi za dokazivanje/opovrgavanje i pojačavanje mnogih klasičnih i novih rezultata u vjerojatnosti, analizi, parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i drugdje te je danas jedna od najpoznatijih, najoriginalnijih i najspektakularnijih tehnika.

Evo vrlo grubog prikaza metode.

1. Odaberite problem s unutrašnjom samo-sličnosti.
2. Svedite problem na ograničavanje "invarijantne" veličine.
3. Napišite nejednadžbu za gornju invarijantnu veličinu koristeći samo-sličnost problema.
4. Radite unatrag: ograničite invarijantnu veličinu pod pretpostavkom da već imamo neko rješenje nejednadžbe.
5. Pronadite neko rješenje nejednadžbe.

Čitatelju će gornja shema dobiti smisao tek nakon što se upozna s konkretnim primjerima. Npr. ovako generalno nije jasno na kakvu samo-sličnost mislimo, je li nejednadžba algebarska ili diferencijalna, kakva rješenja tražimo, itd. Upravo zbog općenitosti ovakva shema je primjenjiva u neslućeno mnogo raznolikih situacija.

NASTAVNI SADRŽAJI:

7. Uvodni primjeri. Primjeri egzaktnih Bellmanovih funkcija. (12 sati)
8. Veze sa stohastičkim optimalnim upravljanjem. (12 sati)
9. Dijadski modeli. Martingalne nejednakosti u diskretnom vremenu. (12 sati)
10. Ocjene singularnih integrala. (12 sati)
11. Maksimalne ocjene. Ocjene kvadratnih funkcija. (12 sati)

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:

Pohađanje predavanja (uživo ili putem interneta), izrada domaćih zadaća, održavanje seminara ili pisanje eseja.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Kolegij će se polagati rješavanjem *nekoliko domaćih zadaća* te ili držanjem *seminarskog izlaganja* ili pripremom *pisanog eseja* koji obrađuje neku naprednu temu (unaprijed dogovorenu s nastavnikom).

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Strogo govoreći, za praćenje predmeta nije potrebno gotovo nikakvo predznanje. Ipak, poželjna je spretnost u diferencijalnom i integralnom računu funkcija više varijabli, kao i familijarnost s osnovnim konceptima mjere i integrala te osnovama teorije vjerojatnosti.

OBAVEZNA LITERATURA:

[1] V. Vasyunin, A. Volberg, *The Bellman function technique in harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **186**, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[2] A. Osękowski, *Sharp martingale and semimartingale* inequalities, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs (New Series) **72**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

DOPUNSKA LITERATURA:

[3] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis,* Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162 (na ruskom); Engleski prijevod: St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

[4] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bellman functions and* L^p *estimates for paraproducts*, Probab. Math. Statist. **38** (2018), no. 2, 459–479.

[5] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bilinear embedding in Orlicz spaces for divergence-form operators with complex coefficients*, J. Funct. Anal. **284** (2023), no. 9, Paper no. 109884.

[6] K. A. Škreb, *Tehnika Bellmanovih funkcija za multilinearne martingalne ocjene*, doktorska disertacija, University of Zagreb, 2017.

[7] V. Kovač, *Applications of the Bellman Function Technique in Multilinear and Nonlinear Harmonic Analysis*, doktorska disertacija, University of California, Los Angeles, 2011.

<table>
<tr><td colspan="3">SEMESTAR STUDIJA: ljetni (30 sati)</td></tr>
<tr><td colspan="3">NAZIV KOLEGIJA: Yangijani i njihove reprezentacije</td></tr>
<tr><td>OBLIK NASTAVE</td><td>SATI TJEDNO</td><td>IZVOĐAČ NASTAVE</td></tr>
<tr><td>predavanja</td><td>2</td><td>Slaven Kožić</td></tr>
<tr><td>vježbe</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>seminar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ECTS BODOVI:</td></tr>
<tr><td colspan="3">CILJ KOLEGIJA:

Yangijani su familija kvantnih grupa povezanih s racionalnim rješenjima Yang-Baxterove jednadžbe. Cilj ovog kolegija je proučiti dvije klase Yangijana: Yangijane pridružene općoj linearnoj Liejevoj algebri, tj. Yangijane tipa A, i zakrenute Yangijane, tj. Yangijane pridružene ortogonalnim i simplektičkim Liejevim algebrama. Kolegij se sastoji od tri dijela. Prvi dio se bavi algebarskim svojstvima tih dviju klasa, kao što su PBW-teoremi, struktura Hopfove algebre i kvantna determinanta. Drugi dio je posvećen teoriji reprezentacija Yangijana i glavni cilj mu je klasificirati sve njihove konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije. Napokon, u trećem dijelu kolegija predstavit ćemo neke primjene Yangijana tipa A u teoriji verteks-algebri, što uključuje Iohara-Kohnovu realizaciju njihovih beskonačnodimenzionalnih reprezentacija, zajedno s konstrukcijom njihovih kvantnih udvojenja.</td></tr>
</table>

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Yangijani tipa A

2. Zakrenuti Yangijani

3. Reprezentacije Yangijana tipa A

4. Reprezentacije zakrenutih Yangijana

5. Primjene Yangijana i kvantno udvojenje

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:

Pohađanje predavanja, izrada i predaja domaćih zadaća, održavanje seminara.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Predane i pozitivno ocijenjene domaće zadaće, održan i pozitivno ocijenjen seminar.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Dovoljno je osnovno predznanje iz linearne algebre i vektorskih prostora. Korisno je, ali ne i nužno, osnovno predznanje o algebarskim strukturama.

OBAVEZNA LITERATURA:

1. A. Molev, Yangians and classical Lie algebras, Mathematical Surveys and Monographs, 143, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

DOPUNSKA LITERATURA:

1. V. Chari, A. N. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, 1995.
2. P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras, V, Selecta Mathematica (New Series) 6 (2000), 105–130.
3. K. Iohara, M. Kohno, A central extension of DYh(gl2) and its vertex representations, Letters in Mathematical Physics 37 (1996), 319–328.
4. A. Molev, Sugawara Operators for Classical Lie Algebras, 229, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
5. M. Nazarov, Double Yangian and the universal R-matrix, Japanese Journal of Mathematics 15 (2020), 169–221.

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

SEMESTAR STUDIJA: zimski i ljetni 2023/24 (60 sati)

NAZIV KOLEGIJA: Asocijacijske sheme

OBLIK NASTAVE	SATI TJEDNO	IZVOĐAČ NASTAVE
predavanja	**2**	prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

ECTS BODOVI: upisuje administracija studija

CILJ KOLEGIJA:

Asocijacijske sheme su jedan od središnjih pojmova algebarske kombinatorike. Cilj ovog kolegija je dati pregled najvažnijih rezultata o asocijacijskim shemama i njihovim primjenama u raznim područjima matematike. Osnovna literatura je nedavno objavljena knjiga [1], uz klasične knjige [3-6] koje imaju stotine citata u istraživačkoj literaturi.

OPIS KOLEGIJA:

Pojam asocijacijske sheme definirali su statističari u 1950-im godinama. Do ekvivalentnog pojma pod nazivom „koherentne konfiguracije" dovela su istraživanja permutacijskih grupa i s njima povezanih algebri u 1970-im. Neovisno i otprilike u isto vrijeme, sovjetski matematičari došli su do ekvivalentnog pojma „celularni prsteni" potaknuti problemima iz teorije grafova. Asocijacijske sheme postaju središnji pojam algebarske kombinatorike objavom disertacije Phillipea Delsartea 1973. godine [5] u kojoj ih je povezao s teorijom kodova i teorijom dizajna.

Definicija asocijacijske sheme nije jednostavna i na prvi pogled ne djeluje prirodno, usprkos tome što se pojam neovisno pojavio u raznim područjima matematike. U prvom dijelu kolegija dat ćemo nježan uvod u definiciju kroz brojne primjere iz teorije grafova, teorije grupa i drugih područja iz kojih su asocijacijske sheme potekle.

U nastavku ćemo obraditi osnovna svojstva i rezultate o asocijacijskim shemama: njihove parametre, pridružene Bose-Mesnerove algebre, svojstvene vrijednosti i dualnost. Spomenut ćemo fuzijske sheme, podsheme, kvocijentne sheme, distancijsko regularne grafove i P-polinomijalne sheme te dualni pojam Q-polinomijalne sheme.

Treći dio kolegija bit će posvećen Delsarteovoj teoriji kodova i dizajna u asocijacijskim shemama. Najvažniji primjeri za ovaj dio teorije su Johnsonove i Hammingove sheme, s kojima ćemo se detaljno upoznati.

U četvrtom dijelu obradit ćemo neke naprednije rezultate o P- i Q-polinomijalnim shemama prema 6. poglavlju knjige [1]. Na kraju ćemo obraditi primjene u drugim područjima poput numeričke analize, teorije aproksimacija, ortogonalnih polinoma i kvantne mehanike.

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Definicija i primjeri asocijacijskih shema. Uvod u klasičnu teoriju kodova i teoriju dizajna. (12 sati)
2. Parametri asocijacijske sheme. Bose-Mesnerova algebra. Svojstvene vrijednosti i dualnost asocijacijskih shema. (12 sati)
3. Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama. (12 sati)
4. P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme. (12 sati)
5. Primjene u drugim područjima matematike. Konačni skupovi u sferama, projektivnim prostorima i euklidskim prostorima. (12 sati)

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:

Pohađanje predavanja (uživo ili putem interneta), izrada domaćih zadaća, održavanje seminara ili pisanje eseja.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Kolegij se polaže rješavanjem *domaćih zadaća* te držanjem *seminarskog izlaganja* ili pripremom *pisanog eseja* koji obrađuje neku temu unaprijed dogovorenu s nastavnikom.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Za praćenje predmeta dovoljno je poznavanje linearne algebre i osnovnih pojmova teorije grafova i teorije grupa. Sadržaj predmeta nadograđuje klasičnu teoriju kodova i teoriju dizajna, ali neće se pretpostavljati predznanja iz tih i drugih područja matematike u kojima asocijacijske sheme imaju primjene.

OBAVEZNA LITERATURA:

[1] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, DeGruyter, 2021.

DOPUNSKA LITERATURA:

[2] R. Bailey, *Association schemes: designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

[3] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin / Cummings Publishing Co., 1984.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[5] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10**, 1973.

[6] C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

[7] C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010. https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: dvosemestralni (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Upravljanje parcijalnim diferencijalnim jednadžbama		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	Martin Lazar Ivica Nakić
vježbe		
seminar		

ECTS BODOVI:
CILJ KOLEGIJA: Teorija upravljanja područje je intenzivnog istraživanja zadnjih desetljeća sa širokim mogućnostima primjena. Osnovni zadatak teorije može se ukratko opisati na sljedeći način: ispitati mogućnosti i uvjete pod kojima se neki fizikalni sustav može iz proizvoljnog stanja dovesti do željenog. Može se pokazati da problem upravljanja ima svoju dualnu verziju u teoriji osmotrivosti: kako procjeniti ukupnu energiju sustava unutar vremenskog intervala [0,T] na osnovu stanja sustava u trenutku T na odgovarajućoj pod-domeni. Cilj ovog kolegija je proučiti zadaće upravljanja za sustave čije se stanje može opisati operatorskom polugrupom na Hilbertovom prostoru. Naglasak će biti na svojstvima dobre postavljenosti, osmotrivosti i upravljivosti. Apstraktni rezultati biti će ilustrirani primjerima u kojima su sustavi opisani parcijalnim diferencijalnim jednadžbama (PDJ). Posebno će se razmatrati metode za efikasno upravljanje parametarski ovisnih sustava, poput simultanog i usrednjenog upravljanja. Konačno, prikazat ćemo i vezu sa strojnim učenjem, čiji razvoj je snažno inspiriran nekim od temeljnih ideja i tehnika korištenih u teoriji upravljanja. Predstavit ćemo uvod u ovu temu, fokusirajući se uglavnom na korištenje upravljačkih tehnika za analizu dubokih neuronskih mreža i njihovih primjena za rješavanje, na primjer, problema nadziranog učenja.
NASTAVNI SADRŽAJI: 1. Upravljanje linearnim običnim diferencijalnim jednadžbama 2. Optimalno upravljanje običnim diferencijalnim jednadžbama 3. Teorija polugrupa

4. Linearni upravljački sustavi na Banachovim prostorima 5. Jednadžba provođenja topline 6. Valna jednadžba 7. Rubni upravljački sustavi 8. Upravljanje parametarski ovisnim sustavima 9. Upravljački aspekti dubokog učenja 10. Neuronske obične diferencijalne jednadžbe
OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: Izrada domaćih zadaća i držanje seminara.
UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Predane i pozitivno ocijenjene domaće zadaće.
NAČIN POLAGANJA ISPITA: Obrana projektnog zadatka.
PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Osnovno poznavanje linerane algebra te teorije običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi – sve na razini odgovarajućih kolegija (pred)diplomskog studija matematike.

LITERATURE:

F. Boyer: Controllability of linear parabolic equation and systems, https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/m2_lecture_notes_fboyer.pdf

E. Trélat: Control in finite and infinite dimension, https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/enseignement/controlSU/

M. Tucsnak , G. Weiss: Observation and Control for Operator Semigroups, Springer (2009)

E. Zuazua: Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some Results and Open Problems, C.M. Dafermos, E. Feireisl (ur.), Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, North-Holland, Vol. 3, 527-621, (2007)

M. Lazar, J. Lohéac: Control of parameter dependent systems // Numerical Control: Part A / Enrique Zuazua, Emmanuel Trelat (ur.), Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, 2022. Vol. 23, 265-306, (2022)

L. Bottou, F. E. Curtis, and J. Nocedal: Optimization methods for large-scale machine learning. SIAM Review, 60 (2) (2018) , 223-311

DOPUNSKA LITERATURA:

C. M. Dafermos, M. Pokorny (eds.): Handbook of differential equations: evolutionary equations, Elsevier (2008)

D. Ruiz-Balet, E. Zuazua: Neural ODE control for classification, approximation and transport. arXiv preprint arXiv:2104.05278, (2021).

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: zimski i ljetni 2023/24 (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Nelinearna elastičnost		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	doc. dr. sc. Matko Ljulj
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		

CILJ KOLEGIJA:

Cilj kolegija je dati pregled klasične teorije nelinearne elastičnosti, počevši s osnovama i postavljanjem konstitutivnih jednadžbi trodimenzionalne nelinearne elastičnosti, ispitivanjem svojstava, te pokazati dva pristupa za dokaz egzistencije rješenja zadaće.

OPIS KOLEGIJA:

Kolegij „Nelinearna elastičnost“ osmišljen je kako bi pružio sveobuhvatno razumijevanje matematičkih temelja koji leže u osnovi trodimenzionalne elastičnosti.

Kolegij započinje uvodom u osnovne koncepte elastičnosti, uključujući analizu naprezanja i deformacija. Studenti će naučiti formulirati konstitutivne jednadžbe koje reguliraju odnos između naprezanja i deformacija u elastičnim materijalima, uzimajući u obzir linearne i nelinearne modele.

Nadalje, kolegij istražuje jednadžbe ravnoteže koje upravljaju ponašanjem elastičnih tijela, naglašavajući linearni i nelinearni slučaj. Studenti će steći vještine formuliranja i rješavanja graničnih problema koristeći matematičke tehnike poput varijacijskih metoda i principa energije.

Do kraja kolegija, studenti će imati duboko razumijevanje matematičkih principa koji leže u osnovi trodimenzionalne nelinearne elastičnosti zajedno s nekim pristupima dokaza egzistencije rješenja nelinearne zadaće. Bit će opremljeni znanjem i vještinama za primjenu matematičke analize u rješavanju složenih problema u ovom području.

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Uvod: jednadžbe ravnoteže, Cauchyjev tenzor naprezanja, Piola-Kirchhoffovi tenzori naprezanja.
2. Konstitutivne jednažbe za elastična tijela.
3. Hiperelastičnost.
4. Rubna zadaća za trodimenzionalnu nelinearnu elastičnost.
5. Teorija egzistencije temeljena na teoremu implicitno zadane funkcije.
6. Teorija egzistencije temeljena na minimizaciji energije (pristup Johna Balla).

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA:

Pohađanje predavanja (uživo ili putem interneta), održavanje seminara.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Nema.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Kolegij će se polagati držanjem *seminarskog izlaganja*.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Poželjno je predznanje o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i osnovama funkcionalne analize.

OBAVEZNA LITERATURA:

[1] P. G. Ciarlet: Mathematical Elasticity, Vol. 1.

DOPUNSKA LITERATURA: [2,3] P. G. Ciarlet: Mathematical Elasticity, Vol. 2, 3. [4] M. E. Gurtin: An Introduction to Continuum Mechanics. [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Theory of Elasticity. [6] S. S. Antmann: Nonlinear Problem of Elasticity.

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: zimski (30 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Uvod u diskretnu geometriju		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	Doc.dr.sc. Ivica Martinjak
vježbe		
seminar		
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		

CILJ KOLEGIJA:

Diskretna geometrija je dio geometrije koji se bavi kombinatornim svojstvima geometrijskih objekata. Proučava konačne skupove objekata kao što su točke, pravci, ravnine, kružnice, mnogokuti, naročito obzirom na njihove aranžmane i presjeke. Između ostalih, istaknute teme u ovom području su ekviparticije, pakiranja, popločavanja. Od posebnog je interesa teorija konveksnih geometrijskih tijela i poliedarska kombinatorika. Diskretna geometrija uključuje koncepte i metode i iz topologije, teorije grafova i teorije brojeva. Izuzetan razvoj ovog područja bilježimo od sredine 20-og stoljeća, dok počeci sežu daleko ranije (doprinosi Keplera, Eulera, …). Spomenimo znameniti Tvebergov teorem (H. Tveberg, 1966), koji je rezultirao mnogim poopćenjima i proširenjima.

U području diskretne geometrije možemo pronaći mnoge fascinantne rezultate i otvorene probleme. Cilj je ovog kolegija da studenti steknu znanja koja su potrebna za pristup tim pitanjima.

Datalji se mogu vidjeti na: http://imartinjak.wordpress.com/teaching/phd-study-d-geometrija

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Uvod. Kratka povijest geometrije. Osnovni koncepti. Pickov teorem. Pascalov teorem. Brianchonov teorem. Diskretni analogoni teorema u geometriji.
2. Konveksnost. Carathéodory-ev teorem. Radonova lema. Helly-ev teorem.
3. Mreže i Minkowskijev teorem. Primjene u teoriji brojeva.
4. Presjeci konveksnih skupova. Poopćeni Carathéodory-ev teorem. Tvebergov teorem.
5. Ekviparticije. Ekviparticije s dva pravca. Ekviparticije s tri pravca. Ekviparticija ogrlice.
6. Upisani i opisani mnogokuti. Rombovi u mnogokutu. “Square peg” teorem.
7. Dysonov teorem. Kakutanijev teorem.
8. Konveksna geometrijska tijela. Geometrijska dualnost. Voronoievi dijagrami.
9. Aranžmani pseudopravaca. Aranžmani hiperravnina. Aranžmani ostalih geometrijskih objekata.
10. Volumeni u višim dimenzijama. Parodoksi u višim dimenzijama. Konstrukcije tijela velikih volumena.
11. Hilbertov treći problem. Dehn-ova invarijanta.
12. Incidencijske strukture. Weakerova lema.

13. Popločavanja. Periodično popločavanje. Penroseovo popločavanje. 14. Pakiranja. Keplerova slutnja. Apollonijevo pakiranje kružnica. 15. Grupe homologija. Betti brojevi i Eulerova karakteristika.
OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: pohađanje predavanja
UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: prisustvo na barem 80% predavanja
NAČIN POLAGANJA ISPITA: održan seminar ili usmeni ispit, po izboru
PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: elementarna geometrija, linearna algebra
OBAVEZNA LITERATURA: **1.** Devadoss, S., O'Rourke, J., Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011. **2.** Matoušek, J., Lectures on Discrete Geometry, Springer, 2002. **3.** Handbook of Discrete and Computational Geometry, ed. J.E. Goodman, J. O'Rourke, C.D. Tóth, CRC Press, 2017. **Ako neka od navedenih knjiga nije u fondu nase knjižnice, bit će naručena.**
DOPUNSKA LITERATURA: **1.** Grünbaum, B., Convex Polytopes, Springer, 2003. **2.** Ziegler, M.G., Lectures on Polytopes, Springer, 2012. **3.** Arnold, V.I., Experimental Mathematics, MSRI, Berkeley, USA, 2015.

<table>
<tr><td colspan="3">NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE</td></tr>
<tr><td colspan="3">SEMESTAR STUDIJA: dvosemestralni (60 sati)</td></tr>
<tr><td colspan="3">NAZIV KOLEGIJA: Vjerojatnosni modeli na rešetkama</td></tr>
<tr><td>OBLIK NASTAVE</td><td>SATI TJEDNO</td><td>IZVOĐAČ NASTAVE</td></tr>
<tr><td>predavanja</td><td>2</td><td>Rudi Mrazović</td></tr>
<tr><td>vježbe</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>seminar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ECTS BODOVI:</td></tr>
<tr><td colspan="3">CILJ KOLEGIJA:

Kolegij će se baviti vjerojatnosnim modelima na rešetkama poput Z^d i heksagonalnoj rešetci. Većini modela koje ćemo proučavati zajedničko je da ih je relativno jednostavno za definirati, ali da usprkos tome imaju bogata globalna svojstva statističke prirode. Cilj kolegija je prezentirati najpoznatije i najproučavanije među tim modelima, dokazati neke od najbitnijih rezultata o njima, kao i prezentirati neka bitna otvorena pitanja.</td></tr>
</table>

NASTAVNI SADRŽAJI:

Kolegij ćemo započeti proučavanjem Isingovog modela. Poseban naglasak bit će na fenomenu promjene faze. Nakon toga preći ćemo na klasični model perkolacije i samoizbjegavajuće šetnje. U potonjem modelu posebni će se naglasak staviti na Duminil-Copinov i Smirnovljev formalni dokaz o egzaktnoj vrijednosti konstante povezanosti u heksagonalnoj rešetci. Ako bude dovoljno vremena, na kraju kolegija bavit ćemo neprekidnom Schramm-Loewnerom evolucijom i njenom vezom s diskretnim modelima.

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća i seminara.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Prisustvo na barem 60% predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Seminari.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Teorija vjerojatnosti, mjere i Lebesgueovog integrala.

OBAVEZNA LITERATURA:

1. S. Friedli, Y. Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems*. Cambridge University Press (2017)

2. G. Grimmett, *Probability on Graphs*, Cambridge University Press (2010)

3. H. Duminil-Copin, *Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice*, Random graphs, phase transitions, and the Gaussian free field, Springer (2020)

DOPUNSKA LITERATURA:

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: Zimski i ljetni semestar akad.god. 2023./2024. (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Ne-Newtonovski fluidi		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	Prof.dr.sc. Igor Pažanin
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		
CILJ KOLEGIJA: Mnogi realni fluidi posjeduju karakteristike koje se ne mogu na zadovoljavajući način opisati klasičnim Navier-Stokesovim modelom te takve fluide nazivamo ne-Newtonovskim fluidima. Cilj ovog kolegija je prezentirati relevantne aspekte matematičke analize vezane uz modele ne-Newtonovskih fluida. Nakon što studentima ukažemo na ne-Newtonovske fenomene realnih fluida, nastavit ćemo s proučavanjem matematičkih svojstava sustava koji modeliraju tok takvih fluida, uključujući Reiner-Rivlinove fluide, fluide drugog reda, Oldroyd-B fluide, itd. Pažnju ćemo usmjeriti na dobru postavljenost odgovarajućih (inicijalno)-rubnih zadaća kao i na asimptotičko modeliranje. Biti će izloženi recentni matematički rezultati, a ukazat ćemo i na moguće buduće smjerove istraživanja u području.		

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Uvod i motivacija
2. Fizikalna pozadina
3. Matematički alati
4. Klasični ne-Newtonovski fluidi
5. Fluidi drugog reda
6. Oldroyd-B i povezani fluidi
7. Asimptotičko modeliranje
8. Problemi za buduća istraživanja

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Održavanje jednog ili više seminara.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Od studenata se očekuje predznanje iz funkcionalne analize te mehanike fluida (osnovni pojmovi i rezultati biti će ponovljeni na uvodnim predavanjima).

LITERATURA:

1. D. Cioranescu, V. Girault, K.R. Rajagopal, *Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type*, Advances in Mechanics and Mathematics Vol. 35, Springer, 2016.
2. G.P. Galdi, *Mathematical Problems in Classical and Non-Newtonian Fluid Mechanics,* Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulation, Oberwolfach Seminars, Vol. 37, 121–273, Birkhauser Verlag, 2008.
3. G. Panasenko, *Introduction to Multiscale Mathematical Modelling*. World Scientific, 2022.

4. Članci po izboru predavača.

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE		
SEMESTAR STUDIJA: Dvosemestralni (60 sati)		
NAZIV KOLEGIJA: Kaotična dinamika na plohama		
OBLIK NASTAVE	**SATI TJEDNO**	**IZVOĐAČ NASTAVE**
predavanja	**2**	prof.dr.sc. Sonja Štimac
vježbe		
seminar		
ECTS BODOVI: upisuje administracija studija		
CILJ KOLEGIJA: Proučavat ćemo kaotičnu dinamiku na plohama. Na početku ćemo dati pregled osnovnih rezultata uniformno hiperboličkih dinamičkih sustava, koji su do danas dosta dobro istraženi. Zatim ćemo, kroz primjere, prikazati neuniformno hiperbolične dinamičke sustave, čudne atraktore te objasniti glavne probleme u proučavanju njihove dinamike. Također ćemo uvesti homokliničke točke i homokliničke tangente koje se pojavljuju u takvim dinamičkim sustavima te dokazati neka njihova svojstva. Središnji dio kolegija je uvođenje dva glavna alata u proučavanju neuniformne kaotične dinamike - inverzni limesi i simbolička dinamika. Zatim ćemo, primjenom ta dva alata, dokazati neke novije rezultate u dinamici na ploham i predstaviti daljnje otvorene probleme.		
NASTAVNI SADRŽAJI: 1. Osnovna svojstva kaotične dinamike (2 tjedna) 2. Osnovna svojstva hiperboličke dinamike (2 tjedna)		

3. Primjeri uniformno hiperboličkih dinamičkih sustava (2 tjedna)

4. Primjeri neuniformno hiperboličkih dinamičkih sustava (3 tjedna)

5. Čudni atraktori (3 tjedna)

6. Homokliničke točke i kaos (3 tjedna)

7. Homokliničke tangente (3 tjedna)

8. Inverzni limesi (4 tjedna)

9. Simbolička dinamika (4 tjedna)

10. Najnoviji rezultati i otvoreni problemi u dinamici na plohama (4 tjedna)

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVA-NJA: Pohađanje predavanja, izrada domaćih zadaća, izrada računalnih projekata, držanje barem jednog seminara u trajanju od najmanje 45 minuta.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Prisustvo na barem 75% predavanja, seminar, domaće zadaće.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Seminar.

PRETPOSTAVLJENO PREDZNANJE: Nema preduvijeta. Poželjno je poznavanje osnova dinamičkih sustava.

OBAVEZNA LITERATURA:

1. C. Bonatti, L.J. Diay, M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102, Mathematical Physics, III, *Springer-Verlag, Berlin,* 2005.

2. J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 35, *Cambridge University Press, Cambridge, 1993*.

….

Ako neka od navedenih knjiga nije u fondu nase knjižnice, bit će naručena.

DOPUNSKA LITERATURA:

1. Qiudong Wang, Lai-Sang Young, *Strange Attractors with One Direction of Instability*, Commun. Math. Phys. 218 (2001), 1 – 97.
2. Leonardo Mora, Marcelo Viana, *Abundance of Strange Attractors*, Acta Math. 171 (1993), 1 – 71.

…

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics

SEMESTER: 1.

COURSE TITLE: Diophantine equations and Chabauty methods

CLASSES TYPE	**hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Nikola Adžaga
exercises	**0**	
seminar	**0**	

ECTS POINTS:

AIMS OF THE PROPOSED COURSE: show different methods of determining integral and rational solutions of Diophantine equations and systems

SYLLABUS: Diophantine equations and approximations (integral solutions). Pell-type equations and the relationship with quadratic fields, systems and (simultaneous) approximations of algebraic numbers, linear forms in logarithms. **Chabauty methods (rational solutions).** Classical Chabauty-Coleman method. Coleman integration for hyperelliptic curves. Newer variants of Chabauty method.

STUDENTS' OBLIGATIONS: none

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: none

FINAL EXAM: Seminar

PREREQUISITE: number theory (at undergraduate level) and algebra (finite and p-adic fields, groups, algebraic number fields, ideals)

LITERATURE: Andrej Dujella – Number Theory, Školska knjiga, 2021. Jennifer Sayaka Balakrishnan - Coleman Integration for Hyperelliptic Curves: Algorithms and Applications, doktorska disertacija, Massachusetts Institute of Technology, 2011. William McCallum & Bjorn Poonen - The method of Chabauty and Coleman. In *Explicit methods in number theory*, volume 36 of Panor. Synthèses, pages 99–117. Soc. Math. France, Paris, 2012
ADDITIONAL LITERATURE: Jennifer S. Balakrishnan & J. Steffen Müller – Computational Tools for Quadratic Chabauty, lecture notes for 2020 Arizona Winter School Filip Najman – Aritmetička geometrija / Andrew Sutherland - Introduction to Arithmetic Geometry, Lecture Notes

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics
SEMESTER: Fall and spring 2023/24 (60 hours),
COURSE TITLE: Point processes

CLASSES TYPE	#hours (weekly)	Professor/Lecturer
lectures	**2**	prof. dr. sc. Bojan Basrak

ECTS POINTS: to be filled in by the administration staff

COURSE GOALS:

The course will introduce the basic concepts and models of the point processes theory. Students will receive a detailed introduction to the main mathematical questions of this theory and learn about its connections with applications in extreme value theory and other areas by following selected parts of the books by Chiu et al. et al. (2013), Kallenberg (2017), Last and Penrose (2017), and Resnick (2007). Students should master the main methods used to study the asymptotic behavior of sequences of point processes.

COURSE DESCRIPTION:

Point processes play a crucial role across diverse disciplines, ranging from analytic number theory to biology and financial mathematics. They offer a mathematical framework for modeling the non-deterministic distribution of points in both time and space. In theoretical mathematics, point processes are intimately linked to the distribution of leading prime divisors in randomly selected natural numbers. In practical applications, point processes are closely tied to the investigation of extreme observations in various contexts. They serve as a natural model for understanding earthquakes and extreme weather phenomena.

We will present how recent results concerning the asymptotic behavior of temporal maxima in a potentially dependent sequence of observations can be rooted in this elegant mathematical theory. Moreover, we will explore the interplay between this theory and the analytic theory of regularly varying distributions. Additionally, we will discuss connections with number theory and explore statistical methods for analysis of point processes, providing illustrations using simulated or real-world datasets.

COURSE CONTENTS:

1. Definition of point processes and their distributions. Basic models (10 hours)
2. Poisson process on a general metric space (10 hours)
3. Poisson process on the set of real numbers (6 hours)
4. Palm distributions of point processes. Stationarity and estimation (12 hours)
5. Convergence (12 hours)
6. Connection with extreme value theory and number theory (10 hours)

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Attending lectures (in class or online), solving homework problems, creating a presentation.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Lecture attendance.

FINAL EXAM: The methods of evaluation include homework assignments, student presentations, and/or oral exams, depending on the number and preferences of enrolled students.

PREREQUISITES: The course requires knowledge of probability and measure theory at the graduate level.

LITERATURE:

[1] Chiu, S.N., Stoyan, D., Kendall, W.S. and Mecke, J., 2013. *Stochastic Geometry and Its Applications*, Wiley.
[2] Kallenberg, O., 2017. *Random measures, theory and applications*, Springer.
[3] Last, G. and Penrose, M., 2017. *Lectures on the Poisson process*, Cambridge University Press.

[4] Resnick, S.I., 2007. *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*, Springer.
SUPPLEMENTARY LITERATURE: [5] Basrak, B., Planinić, H. and Soulier, P., 2018. An invariance principle for sums and record times of regularly varying stationary sequences. *Probability Theory and Related Fields*, 172, pp.869-914. [6] Billingsley, P., 2013. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons. [7] Kulik, R. and Soulier, P., 2020. *Heavy-tailed time series.* Berlin: Springer. [8] Resnick, S.I., 2008. *Extreme values, regular variation, and point processes*. Springer.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: two-semester (60 hours)		
COURSE TITLE: Extremal Graph Theory		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Nina Kamčev

exercises		
seminar		

ECTS POINTS:

AIMS OF THE PROPOSED COURSE:

Extremal graph theory is the study of the largest or smallest possible values of various graph parameters subject to certain constraints. Examples of such statements are “the maximal density of a triangle-free graph is 1/2” and “the maximal chromatic number over all planar graphs is 4”.
There will be a particular emphasis on understanding the various methods used to prove the central results of the course. In particular, probabilistic methods are powerful in extremal graph theory because they allow us to prove the existence of certain graphs or structures with specific (often surprising) properties, even if we can't explicitly construct them.

SYLLABUS:

This course will cover some of the following general areas.

- **Classical extremal graph theory:** Theorems of Turán and Erdős-Stone; bipartite Turán problems; constructions of extremal graphs; dependent random choice. Depending on the background and interests of the students, fundamentals such as Dirac's Theorem and Menger's Theorem may be covered.
- **Randomised constructions and probabilistic methods**
- **Szemerédi's Regularity Lemma:** Statement, proof, and a number of applications; the stability method.
- **Spectral methods in extremal graph theory**
- **Extremal set theory:** Theorems of Sperner, Bollobás, Erdős-Ko-Rado, Kruskal-Katona, Sauer-Shelah, with applications; sunflower

method; linear algebra method for extremal set theory, and applications.

STUDENTS' OBLIGATIONS: Class attendance, homework assignments and seminar projects.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Class attendance of at least 60% of the lectures.

FINAL EXAM: Seminars and / or assignments.

PREREQUISITES: Basic combinatorics (e.g. graph theory), linear algebra and discrete probability.

LITERATURE:

4. N. Alon & J. H. Spencer, *The probabilistic Method*,Wiley, 3rd ed., 2008
5. B. Bollobás, *Extremal graph theory,* Academic Press, 1978
6. R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 3rd ed., 2005

SUPPLEMENTARY LITERATURE:

1. M. Schacht, *Regularity Lemma and Applications*, online resource.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: 2.		
COURSE TITLE: Selected topics in arithmetic geometry		
CLASSES TYPE	**hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Matija Kazalicki
exercises	**0**	
seminar	**0**	
ECTS POINTS:		
AIMS OF THE PROPOSED COURSE: The goal of the course is to provide students with an introduction to contemporary topics in arithmetic geometry.		
SYLLABUS: Elliptic curves. Galois cohomology. Selmer group and Tate-Shafarevich group. Heights. Proof of Mordell Weil Theorem for elliptic curves. The Parity Conjecture and finiteness of Sha. Cassels-Tate pairing. Quadratic twists of genus one curves.		
STUDENTS' OBLIGATIONS: none		
FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: none		
FINAL EXAM: Seminar		
PREREQUISITE: Basic understanding of algebraic number theory, algebra and the arithmetic of elliptic curves (at the undergrad level).		

LITERATURE:
J. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves   **T. Dokchitser, Notes on the Parity Conjecture**   **T. Fisher, E.F. Shaefer, M. Stoll, The Yoga of the Cassels-Tate pairing**
ADDITIONAL LITERATURE:

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Fall and spring 2023/24 (60 hours),		
COURSE TITLE: Bellman function method in analysis and probability		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač
ECTS POINTS: to be filled in by the administration staff		

COURSE GOALS:

The goal of the course is to familiarize students with the so-called Bellman function technique, especially through numerous examples from mathematical analysis and probability theory. We will cover majority of books [1] and [2]. More precisely, book [1] will be used to familiarize with the basic idea, examples from analysis (e.g., embedding theorems, estimates for integral operators) and tricks for finding Bellman functions, while book [2] will complement the material with examples from probability (e.g., martingale estimates). A mathematician who masters this technique will know how to methodically approach many diverse types of problems and can gain a huge advantage in problem solving compared to the majority of scientists who still find this method "mystical" or think that the solution can be found by mere guessing.

COURSE DESCRIPTION:

The technique we will study is a very useful idea in theoretical mathematics. It is named after an applied mathematician Richard E. Bellman, who influenced it with his work in dynamic programming and stochastic optimal control. In probability theory, the idea was first used by Donald L. Burkholder in the 1980s, so it is sometimes called *Burkholder's method*. The method was applied in mathematical analysis and further developed into a systematic theory by Fedor L. Nazarov, Sergei R. Treil and Alexander L. Volberg in a whole series of books and papers from the late 1990s to the present day. The same people coined the term *Bellman function method*. It is used to prove/disprove and strengthen many classical and new results in probability, analysis, partial differential equations and elsewhere, and it is one of the most famous, original, and spectacular techniques today.

Here is a very rough outline of the method.

1. Choose a problem with internal self-similarity.
2. Reduce the problem to bounding an “invariant” quantity.
3. Write an inequality for the above invariant quantity using the self-similarity of the problem.
4. Work backwards: control the invariant quantity assuming that we already have a solution to the inequality.
5. Find a solution to the inequality.

The above scheme will start making sense only after the reader familiarizes themselves with concrete examples. For example, it is generally not clear what kind of self-similarity we are referring to, whether the inequality is algebraic or differential, what solutions we are looking for, etc. Precisely because of its generality, this scheme is applicable in an unimaginably wide variety of situations.

COURSE CONTENTS:

1. Introductory examples. Examples of exact Bellman functions. (12 hours)
2. Connections to the stochastic optimal control. (12 hours)
3. Dyadic models. Martingale inequalities in discrete time. (12 hours)
4. Estimates for singular integrals. (12 hours)
5. Maximal estimates. Estimates for square functions. (12 hours)

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Lecture attendance (in class or online), solving homework problems, presenting a seminar or writing an essay.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Lecture attendance.

FINAL EXAM: In order to pass the course students will have to solve *several homeworks* and, either give a *seminar presentation*, or prepare a *written essay* on an advanced topic (confirmed beforehand with the instructor).

PREREQUISITES: Strictly speaking, there is no prerequisite knowledge required for following the course. However, dexterity in the differential and integral calculus of several variable functions is desirable, as well as familiarity with the basic concepts of measure and integration and the basics of probability theory.

LITERATURE:

[1] V. Vasyunin, A. Volberg, *The Bellman function technique in harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **186**, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[2] A. Osękowski, *Sharp martingale and semimartingale* inequalities, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs (New Series) **72**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

SUPPLEMENTARY LITERATURE:

[3] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162 (na ruskom); English translation: St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

[4] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bellman functions and* L^p *estimates for paraproducts*, Probab. Math. Statist. **38** (2018), no. 2, 459–479.

[5] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bilinear embedding in Orlicz spaces for divergence-form operators with complex coefficients*, J. Funct. Anal. **284** (2023), no. 9, Paper no. 109884.

[6] K. A. Škreb, *The Bellman function technique for multilinear martingale estimates*, doctoral dissertation, University of Zagreb, 2017.

[7] V. Kovač, *Applications of the Bellman Function Technique in Multilinear and Nonlinear Harmonic Analysis*, doctoral dissertation, University of California, Los Angeles, 2011.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Spring (30 hours)		
COURSE TITLE: Yangians and their representations		
CLASSES TYPE	**hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Slaven Kožić
exercises		
seminar		
ECTS POINTS:		
AIMS OF THE PROPOSED COURSE:		

The Yangians present a family of quantum groups related to rational solutions of the Yang-Baxter equation. The goal of this course is to study two classes of Yangians: the Yangians associated with the general linear Lie algebra, i.e. the Yangians in type A, and the twisted Yangians, i.e. the Yangians associated with orthogonal and symplectic Lie algebras. The course consists of three parts. The first part is focused on the algebraic properties of these two classes, such as PBW-theorems, Hopf algebra structure and quantum determinant. The second part is dedicated to the representation theory of Yangians, and its main goal is to classify their finite-dimensional irreducible representations. Finally, in the third part of the course, we present some applications of Yangians in type A to vertex algebra theory, which includes the Iohara-Kohno realization of their infinite-dimensional representations, along with the construction of their quantum doubles.

SYLLABUS:

1. Yangians of type A

2. Twisted Yangians

3. Representations of Yangians of type A

4. Representations of twisted Yangians

5. Applications of Yangians and the quantum double

STUDENTS' OBLIGATIONS: Attending lectures, doing homeworks, holding a seminar

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Attending lectures

FINAL EXAM: Homework assignments solved and oral seminar presentation held

PREREQUISITE: Basic knowledge from the areas of linear algebra and vector spaces is sufficient. Some knowledge of algebraic structures is useful, but not necessary.

LITERATURE:

1. A. Molev, Yangians and classical Lie algebras, Mathematical Surveys and Monographs, 143, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

ADDITIONAL LITERATURE:

6. V. Chari, A. N. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, 1995.
7. P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras, V, Selecta Mathematica (New Series) 6 (2000), 105–130.
8. K. Iohara, M. Kohno, A central extension of DYh(gl2) and its vertex representations, Letters in Mathematical Physics 37 (1996), 319–328.
9. A. Molev, Sugawara Operators for Classical Lie Algebras, 229, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
10. M. Nazarov, Double Yangian and the universal R-matrix, Japanese Journal of Mathematics 15 (2020), 169–221.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Fall and spring 2023/24 (60 hours),		
COURSE TITLE: Association schemes		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	prof. dr. sc. Vedran Krčadinac
ECTS POINTS: to be filled in by the administration staff		
COURSE GOALS: Association schemes are one of the central concepts of algebraic combinatorics. The goal of this course is to give an overview of the most		

important results about association schemes and their applications in various parts of mathematics. The main text will be the recently published book [1], along with classic books [3-6] which have hundreds of citations in the research literature.

COURSE DESCRIPTION:

The concept of association schemes was defined by statisticians in the 1950s. Research of permutation groups and related algebras in the 1970s lead to the equivalent concept of “coherent configurations”. Independently and at about the same time, Soviet mathematicians studied “cellular rings”, another equivalent concept motivated by problems from graph theory. Association schemes became a central notion of algebraic combinatorics with the publication of Phillipe Delsarte's thesis [5] in 1973, in which he established connections with coding theory and design theory.

The definition of an association scheme is not simple and at first glance it does not seem natural, despite the fact that the concept independently emerged in various areas of mathematics. In the first part of the course, we will provide a gentle introduction to the definition through numerous examples from graph theory, group theory and other areas from which association schemes originated.

In the sequel we will cover basic properties and results about association schemes: their parameters, associated Bose-Mesner algebras, eigenvalues, and duality. We will mention fusion schemes, subschemes, quotient schemes, distance regular graphs, P-polynomial schemes, and the dual concept of Q-polynomial schemes.

The third part of the course will be devoted to Delsarte’s theory of codes and designs in association schemes. The most important examples for this part of the theory are Johnson and Hamming schemes, which will be explored in more detail.

In the fourth part, we will study some more advanced results about P- and Q-polynomial schemes following Chapter 6 of the book [1]. In the final part of the course, we will explore applications in other areas such as numerical analysis, approximation theory, orthogonal polynomials, and quantum mechanics.

COURSE CONTENTS:

1. Definition and examples of association schemes. Introduction to classical coding theory and design theory. (12 hours)
2. Parameters of an association scheme. Bose-Mesner algebra. Eigenvalues and duality of association schemes. (12 hours)
3. Codes and designs in association schemes. (12 hours)
4. P- and Q-polynomial association schemes. (12 hours)
5. Applications in other areas of mathematics. Finite sets on spheres, projective spaces, and Euclidean spaces. (12 hours)

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Lecture attendance (in class or online), solving homework problems, presenting a seminar or writing an essay.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Lecture attendance.

FINAL EXAM: In order to pass the course students will have to solve *homework problems* and either give a *seminar presentation*, or prepare a *written essay* on a topic agreed upon beforehand with the instructor.

PREREQUISITES: To follow the course, knowledge of linear algebra and some basic graph theory and group theory suffice. The course builds upon classical coding theory and design theory, but no prior knowledge of these and other areas of mathematics where association schemes have applications will be assumed.

LITERATURE:

[1] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, DeGruyter, 2021.

SUPPLEMENTARY LITERATURE:

[2] R. Bailey, *Association schemes: designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

[3] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin / Cummings Publishing Co., 1984.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[5] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10**, 1973.

[6] C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

[7] C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010. https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Fall and spring 2023/24 (60 hours),		
COURSE TITLE: Nonlinear Elasticity		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	doc. dr. sc. Matko Ljulj
ECTS POINTS: to be filled in by the administration staff		

COURSE GOALS:

The objective of the course is to provide an overview of classical theory of nonlinear elasticity, starting with fundamentals and establishing constitutive equations of three-dimensional nonlinear elasticity, examining its properties, and presenting two approaches for proving the existence of solutions to the problem.

COURSE DESCRIPTION:

The course "Nonlinear Elasticity" is designed to provide a comprehensive understanding of the mathematical foundations underlying three-dimensional elasticity.

The course begins with an introduction to the basic concepts of elasticity, including stress and strain analysis. Students will learn to formulate constitutive equations that govern the relationship between stress and strain in elastic materials, considering both linear and nonlinear models.

Furthermore, the course explores equilibrium equations that govern the behavior of elastic bodies, emphasizing both linear and nonlinear cases. Students will acquire skills in formulating and solving boundary value problems using mathematical techniques such as variational methods and the principle of energy.

By the end of the course, students will have a deep understanding of the mathematical principles underlying three-dimensional nonlinear elasticity, along with some approaches to prove the existence of solutions to nonlinear problems. They will be equipped with knowledge and skills to apply mathematical analysis to solve complex problems in this field.

COURSE CONTENTS:

1. Introduction: equilibrium equations, Cauchy stress tensor, Piola-Kirchhoff stress tensors.
2. Constitutive equations for elastic bodies.
3. Hyperelasticity.
4. Boundary value problems for three-dimensional nonlinear elasticity.
5. Existence theory based on the implicit function theorem.
6. Existence theory based on energy minimization (John Ball's approach).

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Lecture attendance (in class or online), presenting a seminar.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: None.

FINAL EXAM: In order to pass the course students will have to give a *seminar presentation.*

PREREQUISITES: Prior knowledge of partial differential equations and basics of functional analysis is desirable.

LITERATURE:

[1] P. G. Ciarlet: Mathematical Elasticity, Vol. 1.

SUPPLEMENTARY LITERATURE:

[2,3] P. G. Ciarlet: Mathematical Elasticity, Vol. 2, 3.

[4] M. E. Gurtin: An Introduction to Continuum Mechanics.

[5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Theory of Elasticity.

[6] S. S. Antman: Nonlinear Problem of Elasticity.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics

SEMESTER: Fall (30 hours)

COURSE TITLE: Introduction to Discrete Geometry

CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Doc.dr.sc. Ivica Martinjak
exercises		
seminar		

ECTS POINTS: to be filled in by the admin stuff

AIMS OF THE PROPOSED COURSE: Discrete geometry is a branch of geometry that study combinatorial properties of geometric objects. It deals with finite sets of elements such as points, lines, planes, circles, polygons, concerning questions on intersection and arrangements. The list of the main topics in the field includes packing, covering, folding, tiling, partitioning. The theory of convex polytopes and polyhedral combinatorics is of particular interest. Discrete geometry includes notions and methods of topology, graph theory, number theory and other parts of mathematics as well. Many advances in the area have been made since the middle of the 20th century. From then we have the famous Tveberg's theorem (H. Tveberg, 1966), that has resulted with many variations and extensions. One can find many fascinating results and unsolved problems in the field. Within this course, students will gain the necessary knowledge to approach to these problems.

Further details: http://imartinjak.wordpress.com/teaching/phd-study-d-geometrija

SYLLABUS:

1. Introduction. A brief history of geometry. Basic notions. Pick's theorem. Pascal's and Brianchon's theorem. Discrete analogues of theorems in geometry.
2. Convexity. Carathéodory theorem. Radon's lemma. Helly's theorem.
3. Lattices and Minkowski's theorem. Applications in number theory.
4. Intersection patterns of convex sets. The Colorful Carathéodory theorem. Tveberg's theorem.
5. Fair divisions. Equipartitions with two and three lines. Splitting necklaces.
6. Inscribed and circumscribed polygons. Rhombi in polygons. Square peg theorem.
7. Dyson's theorem. Kakutani's theorem.
8. Convex polytopes. Geometric duality. Voronoi diagram.
9. Pseudoline arrangements. Arrangements of Hyperplanes. Arrangements of other geometric objects. Oriented matroids.
10. Volumes in high dimensions. Paradoxes in high dimensions. Constructing polytopes of large volume.
11. Hilbert's third problem. Dehn invariants.
12. Incidence structures. Weaker cutting lemma.
13. Tilings. Periodic tilings. Penrose tilings.
14. Packings. Kepler conjecture. Apollonian circle packing.
15. Homology groups. Betti numbers and Euler characteristics.

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Class attendance

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: min 80% class attendance

FINAL EXAM: seminar or oral exam
PREREQUISITESS : elementary geometry, linear algebra
LITERATURE: **1.** Devadoss, S., O'Rourke, J., Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011. **2.** Matoušek, J., Lectures on Discrete Geometry, Springer, 2002. **3.** Handbook of Discrete and Computational Geometry, ed. J.E. Goodman, J. O'Rourke, C.D. Tóth, CRC Press, 2017.
SUPPLEMENTARY LITERATURE: **1.** Grünbaum, B., Convex Polytopes, Springer, 2003. **2.** Ziegler, M.G., Lectures on Polytopes, Springer, 2012. **3.** Arnold, V.I., Experimental Mathematics, MSRI, Berkeley, USA, 2015.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: two-semester (60 hours)		
COURSE TITLE: Probabilistic lattice models		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**

lectures	**2**	Rudi Mrazović
exercises		
seminar		
ECTS POINTS:		

AIMS OF THE PROPOSED COURSE:

The course will deal with probabilistic models on lattices like Z^d and the hexagonal lattice. Most of the models we will study have in common that they are relatively simple to define, but nevertheless have rich statistical global properties. The aim of the course is to present the most famous and studied among these models, to prove some of the most important results about them, as well as to present some important open questions.

SYLLABUS:

We will start the course by studying the Ising model. Special emphasis will be placed on the phase transition phenomenon. After that, we will move on to the classical model of percolation and self-avoiding walks. In the latte, special emphasis will be placed on Duminil-Copin's and Smirnov's formal proof of the exact value of the connective constant of the hexagonal lattice. If time permits, at the end of the course we will deal with the continuous Schramm-Loewner evolution and its connection with discrete models.

STUDENTS' OBLIGATIONS: Class attendance, homework assignments and seminar projects.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Class attendance of at least 60% of the lectures.

FINAL EXAM: Seminars.
PREREQUISITES: Probability theory, measure theory, Lebesgue integration.
LITERATURE: 1. S. Friedli, Y. Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems*. Cambridge University Press (2017) 2. G. Grimmett, *Probability on Graphs*, Cambridge University Press (2010) 3. H. Duminil-Copin, *Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice*, Random graphs, phase transitions, and the Gaussian free field, Springer (2020)
SUPPLEMENTARY LITERATURE:

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: two-semester (60 hours)		
COURSE TITLE: Control of partial differential equations		
CLASSES TYPE	**hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Martin Lazar Ivica Nakić

exercises		
seminar		
ECTS POINTS:		

AIMS OF THE PROPOSED COURSE:

Control theory is an area of intensive research in recent decades with wide application possibilities. The basic task of the theory can be briefly described as follows: examine the possibilities and conditions under which a physical system can be brought from an arbitrary state to a desired one. It can be shown that the control problem has its dual version in the theory of observability: how to estimate the total energy of the system within the time interval [0,T] based on the state of the system at time T on the corresponding sub-domain.

The aim of this course is to study control tasks for systems whose state can be described by an operator semigroup on Hilbert space. The emphasis will be on the properties of well posedness, observability and controllability. Abstract results will be illustrated by examples in which systems are described by partial differential equations (PDEs). Special consideration will be given to methods for efficient control of parameter-dependent systems, such as simultaneous and averaged control.

Finally, we will show the connection with machine learning, the development of which is strongly inspired by some of the fundamental ideas and techniques used in control theory. We will present an introduction to this topic, focusing mainly on the use of control techniques for the analysis of deep neural networks and their applications to, for example, supervised learning problems.

SYLLABUS:

1. Controllability of linear ordinary differential equations
2. Optimal control of ordinary differential equations
3. Semigroup theory
4. Linear control systems in Banach spaces
5. The heat equation
6. The wave equation
7. Boundary control systems

8. Control of parameter dependent systems

9. Control aspects in deep learning

10. Neural ordinary differential equations

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Homework assignments and presentations.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS:

Positive evaluation of the homework assignments.

FINAL EXAM:

Defense of a project assignment.

PREREQUISITE:

Basic familiarity with linear algebra, the theory of ordinary and partial differential equations - all at the level of the corresponding courses of the (under)graduate university programmes at Department of Mathematics.

LITERATURE:

F. Boyer: Controllability of linear parabolic equation and systems, https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/m2_lecture_notes_fboyer.pdf

E. Trélat: Control in finite and infinite dimension, https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/enseignement/controlSU/

M. Tucsnak , G. Weiss: Observation and Control for Operator Semigroups, Springer (2009)

E. Zuazua: Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some Results and Open Problems, C.M. Dafermos, E. Feireisl (ur.), Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, North-Holland, Vol. 3, 527-621, (2007)

M. Lazar, J. Lohéac: Control of parameter dependent systems // Numerical Control: Part A / Enrique Zuazua, Emmanuel Trelat (ed.),

Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, 2022. Vol. 23, 265-306, (2022) L. Bottou, F. E. Curtis, and J. Nocedal: Optimization methods for large-scale machine learning. SIAM Review, 60 (2) (2018) , 223-311
ADDITIONAL LITERATURE: C. M. Dafermos, M. Pokorny (eds.): Handbook of differential equations: evolutionary equations, Elsevier (2008) D. Ruiz-Balet, E. Zuazua: Neural ODE control for classification, approximation and transport. arXiv preprint arXiv:2104.05278, (2021)

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Fall and spring 2023/2024 (60 hours)		
COURSE TITLE: Non-Newtonian fluids		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	Prof.dr.sc. Igor Pažanin
ECTS POINTS: to be filled in by the administration staff		
COURSE GOALS: Many real fluids exhibit certain characteristics that cannot be satisfactorily described by the classical Navier–Stokes fluid model and such fluids are referred to as non-Newtonian fluids. The goal of this course is to present the relevant aspects of the mathematical analysis related to non-Newtonian fluid models. After introducing to students the variety of non-Newtonian phenomena exhibited by real fluids, we shall proceed by discussing the mathematical properties of the equations modelling the flow of non-Newtonian fluids, including Reiner-Rivlin fluids,		

second-order fluids, Oldroyd-B fluids, etc. The focus will be on the well-posedness of the governing problems as well as on the asymptotic modelling. The recent mathematical results will be presented, and we shall also discuss the possible directions of the future research in the field.

COURSE CONTENTS:

9. Introduction nad motivation
10. Physical background
11. Mathematical tools
12. Classical non-Newtonian fluids
13. Second-order fluids
14. Oldroyd-B and related fluids
15. Asymptotic modelling
16. Problems for future research

STUDENTS' OBLIGATIONS:

Lecture attendance, solving homework problems.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Lecture attendance.

FINAL EXAM: In order to pass the course, one ore more seminars will have to be held by the student.

PREREQUISITES: The students are expected to possess the knowledge at a basic theoretical level in functional analysis and fluid mechanics.

LITERATURE:

5. D. Cioranescu, V. Girault, K.R. Rajagopal, *Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type*, Advances in Mechanics and

Mathematics Vol. 35, Springer, 2016.

6. G.P. Galdi, *Mathematical Problems in Classical and Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulation, Oberwolfach Seminars, Vol. 37, 121–273, Birkhauser Verlag, 2008.
7. G. Panasenko, *Introduction to Multiscale Mathematical Modelling*. World Scientific, 2022.
8. Selection of papers by the choice of lecturer.

STUDY PROGRAM: PhD Program in Mathematics		
SEMESTER: Two-semester (60 hours)		
COURSE TITLE: Chaotic dynamics on surfaces		
CLASSES TYPE	**#hours (weekly)**	**Professor/Lecturer**
lectures	**2**	prof.dr.sc. Sonja Štimac
exercises		
seminar		
ECTS POINTS: to be filled in by the admin stuff		
AIMS OF THE PROPOSED COURSE: We will study chaotic dynamics on surfaces. In the beginning, we will give an overview of basic results on uniformly hyperbolic dynamical systems which are almost well-understood so far. Then we will introduce, through examples, non-uniformly hyperbolic dynamical systems, strange attractors and explain major problems in studying their dynamics. We will also introduce homoclinic points and homoclinic tangencies that appear in such dynamical systems and prove some of their properties. The central part of the course is the introduction of two main tools in studying non-uniformly chaotic dynamics – inverse limit spaces and symbolic dynamics. Then, applying these two tools, we will prove some recent results in surface dynamics and present further open problems.		

SYLLABUS:

1. Basic properties of chaotic dynamics (2 weeks)
2. Basic properties of hyperbolic dynamics (2 weeks)
3. Examples of uniformly hyperbolic dynamical systems (2 weeks)
4. Examples of non-uniformly hyperbolic dynamical systems (3 weeks)
5. Strange attractors (3 weeks)
6. Homoclinic points and chaos (3 weeks)
7. Homoclinic tangecies (3 weeks)
8. Inverse limit spaces (4 weeks)
9. Symbolic dynamics (4 weeks)
10. Recent results and open problems in surface dynamics (4 weeks)

STUDENTS' OBLIGATIONS: Class attendance, homework, seminar projects, computer projects.

FINAL EXAM MINIMUM REQUIREMENTS: Attendance in at least 75% of classes, homework, seminar projects.

FINAL EXAM: Seminars.

PREREQUISITESS: None. Familiarity with basics of dynamical systems is very welcome.

LITERATURE:

1. C. Bonatti, L.J. Diay, M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102, Mathematical Physics, III, *Springer-Verlag, Berlin*, 2005.

2. J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 35, *Cambridge University Press, Cambridge, 1993*.

….
SUPPLEMENTARY LITERATURE: *3.* Qiudong Wang, Lai-Sang Young, *Strange Attractors with One Direction of Instability*, Commun. Math. Phys. 218 (2001), 1 – 97. 4. Leonardo Mora, Marcelo Viana, *Abundance of Strange Attractors*, Acta Math. 171 (1993), 1 – 71. **…**

ZNANSTVENI SEMINARI

Sveučilište u Zagrebu

- Seminar za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu
- Seminar za diferencijalne jednadžbe i nelinearnu analizu
- Seminar za topologiju
- Seminar za matematičku logiku i osnove matematike
- Seminar za funkcionalnu analizu
- Seminar za teoriju vjerojatnosti
- Seminar za teoriju reprezentacija
- Seminar za teoriju brojeva i algebru
- Seminar za geometriju
- Seminar za matematičko programiranje i teoriju igara
- Seminar za kombinatoriku i diskretnu matematiku
- Seminar za numeričku matematiku i znanstveno računanje
- Seminar za diferencijalnu geometriju
- Seminar za konačne geometrije i grupe
- Seminar za nejednakosti i primjene
- Seminar za teorijsko računarstvo
- Seminar za algebru
- Seminar za unitarne reprezentacije i automorfne forme
- Seminar za metodiku nastave matematike
- Seminar za analizu
- Seminar za dinamičke sustave
- Seminar za analizu i algebru Alpe–Jadran (Hrvatska–Slovenija (Ljubljana, Maribor,Kopar))

Sveučilište u Osijeku

- Seminar za optimizaciju i primjene

Sveučilište u Splitu

- Topološki seminar
- Seminar za diskretnu matematiku

Sveučilište u Rijeci

- Seminar za konačnu matematiku
- Seminar za matematičku analizu i primjene

PRAVILA STUDIRANJA NA ZAJEDNIČKOM SVEUČILIŠNOM POSLIJEDIPLOMSKOM DOKTORSKOM STUDIJU IZ ZNANSTVENOG POLJA MATEMATIKE KOJEG IZVODI MATEMATIČKI ODSJEK PMF-a

Odredbama Pravilnika o doktorskim studijima na Pridoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (dalje: Pravilnik) KLASA: 033-05/18-01/1003, URBROJ: 251-58-10201-19-10001 od 4. srpnja 2019. godine uređuje se ustroj i izvođenje doktorskih studija, nastava i istraživanje na doktorskim studijima, uvjeti upisa i trajanje studija, način izvedbe studija, mentorstvo, postupak prijave, ocjene i obrane doktorske disertacije, prava i obveze studenata doktorskih studija.

Pravilnik iz prethodnog stavka primijenjuje se na studente upisane na doktorske studije na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (dalje: Fakultet) od akademske godine 2019./2020.

Pravilima studiranja na zajedničkom poslijediplomskom doktorskom studiju matematike (dalje: doktorski studij matematike) kojeg organizira i izvodi Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu uz sudjelovanje Sveučilišta u Rijeci, Osijeku i Splitu, uređuju se posebna pravila vazana za upis na doktorski studij matematike, uvjeti koje pristupnici trebaju ispuniti, ustroj, izvedba i završetak doktorskog studija.

Upis na doktorski studij matematike

I.

(1) Na inicijativu Vijeća doktorskog studija, Vijeće Matematičkog odsjeka predlaže Fakultetskom vijeću raspis javnog natječaja za upis pristupnika na studij. Natječaj se raspisuje svake godine u rujnu ili listopadu, oglašavanjem u javnom tisku i na Internetskim stranicama Fakulteta.

(2) Pristupnici koji se prijavljuju na natječaj iz prethodnog stavka moraju to učiniti u roku predviđenom natječajem, pri čemu moraju ispunjavati sljedeće uvjete:

- završen diplomski studij matematike, matematike i informatike ili matematike i fizike na jednom od Sveučilišta iz stavka 1., ili odgovarajući studij u inozemstvu sukladno odredbama Zakona o priznavanju inozemnih obrazovnih kvalifikacija. Izuzetno se može odobriti upis pristupnicima koji su završili neki od studija bliskih studiju matematike (fizika, elektrotehnika i slično). Takvo odobrenje daje Kolegij doktorskog studija;
- minimalna prosječna ocjena tijekom diplomskog studija mora biti najmanje 3,5. Izuzetno se može odobriti upis i s prosječnom ocjenom iznad 3,0. Takvo odobrenje daje Kolegij doktorskog studija;
- pristupnik mora poznavati barem jedan od svjetskih jezika u mjeri koja osigurava normalno praćenje matematičke litaruture.

II.

(1) Pristupnici koji se prijave na natječaj i ispune uvjete iz natječaja pozvat će se na upis.
(2) Pristupnik bira i upisuje predmete na način i u opsegu koji je propisan nastavnim planom i programom studija, a uz suglasnost voditelja doktorskog studija.
(3) U izuzetnim će se slučajevima odobriti upis i pristupniku koji se javi nakon proteka roka predviđenog natječajem, ali ne nakon 31. prosinca tekuće akademske godine.
(4) Troškovi studija se podmiruju pod uvjetima, u visini i na način predviđen ugovorom o studiranju.

Ustroj i izvedba doktorskog studija matematike

III.

(1) Vijeće doktorskog studija na prijedlog Kolegija doktorskog studija svake četiri godine određuje jednu do četiri matematičke discipline koje spadaju u teorijsku grupu predmeta i jednu do četiri matematičke discipline koje spadaju u primijenjenu grupu predmeta. Za svaku od odabranih disciplina određuje se jedan osnovni predmet za sljedeće četiri godine.
(2) Svake četiri godine Kolegij doktorskog studija određuje sadržaj osnovnog predmeta iz svake od disciplina navedenih u prethodnom stavku. Svake godine mora biti ponuđen barem jedan osnovni predmet iz svake disciplina iz stavka 1. Sadržaj osnovnog predmeta ujedno predstavlja i materijal potreban za polaganje pristupnog ispita.

IV.

(1) Za svaku od disciplina navedenih u točki III. stavku 1. postoji pristupni ispit.
(2) Za svaku od disciplina navedenih u točki III. stavku 1. Kolegij doktorskog studija određuje svake godine tročlano ispitno povjerenstvo.
(3) Pristupni se ispiti mogu polagati samo u ožujku, lipnju, listopadu i prosincu svake godine i moraju se prijaviti voditelju doktorskog studija barem mjesec dana unaprijed.
(4) Pristupni se ispiti mogu polagati direktno ili kroz osnovni predmet, ali u svakom slučaju pred ispitnim povjerenstvom iz stavka 2. ove točke.
(5) Pristupni su ispiti usmeni, a ispitno povjerenstvo može, ako ocijeni potrebnim, odrediti i pismeni dio ispita.

(6) Na svaki se pristupni ispit može pristupiti najviše dva puta. Student koji nakon dva puta ne uspije položiti pristupni ispit gubi pravo na nastavak studija.

V.

(1) Svake godine određuju se predmeti koji trebaju prezentirati suvremena matematička istraživanja za koja postoji jak interes u matematici, ili klasične teorije koje su od fundamentalnog značenja za daljnji razvoj matematike. Pri odabiru predmeta vodit će se briga o razini sadržaja i ravnomjernoj zastupljenosti područja matematike. Godišnje se predviđa ponuda od 8 do 16 predmeta (uključujući i osnovne predmete).
(2) Svake se godine utvrđuje lista poslijediplomskih seminara. Za nastavak rada postojećeg seminara, nužan je uvjet održavanje barem 8 seminara u prethodnoj akademskoj godini.
(3) Predmete iz stavka 1., zajedno s njihovim programima, te poslijediplomske seminare, predlaže voditelj doktorskog studija u konzultaciji s Kolegijem doktorskog studija.

VI.

(1) Svaki student odabire dva pristupna ispita iz disciplina navedenih u točki III. stavku 1.
(2) Svaki student mora tijekom studija, a prije upisa u drugu godinu studija, položiti dva pristupna ispita i to najmanje ocjenom 4 (vrlo dobar).

VII.

(1) Voditelj doktorskog studija brine o ravnomjernoj podjeli upisanih predmeta u odnosu na osnovne smjerove matematike, a također i na predavače.
(2) Tijekom prve godine studija Vijeće doktorskog studija određuje studijskog savjetnika studentu u dogovoru sa studentom i nastavnikom.

VIII.

(1) Tijekom studija vrijedi sljedeći sustav vrednovanja:

Osnovni predmet	6 ECTS bodova
Napredni kolegij 60 sati	8 ECTS bodova
Napredni kolegij 30 sati	4 ECTS boda
Uvod u istraživački rad	24 ECTS bodova

Seminar	20 ECTS bodova
Znanstveni kolokvij	4 ECTS boda
Istraživački rad	20 ECTS bodova
Doktorska disertacija	28 ECTS bodova

(2) U prvoj godini studija upisuju se dva osnovna predmeta (pristupni ispiti), uvod u istraživački rad, jedan seminar i znanstveni kolokvij.
(3) Za polaganje poslijediplomskih seminara, student mora u prve dvije godine studija s uspjehom održati barem dva seminara, a u trećoj godini studija barem četiri seminara temu kojih određuje voditelj seminara.
(4) U izuzetnim slučajevima voditelj doktorskog studija može odobriti promjenu upisanog seminara.
(5) Sudjelovanje na više od 50% znanstvenih kolokvija uvjet je za dobivanje potpisa iz kolokvija. Evidenciju dolazaka studenata na kolokvij provodi voditelj kolokvija, koji je također ovlašten davati potpise. U slučaju opravdane spriječenosti sudjelovanja na znanstvenom kolokviju, student može u dogovoru s voditeljem seminara i voditeljem doktorskog studija održati jedan dodatni seminar kako bi ostvario pravo na potpis iz kolokvija. Takav seminar ne smije biti usko tematski vezan uz disertaciju. U takvim slučajevima potpis iz kolokvija daje voditelj seminara.

IX.
(1) Uvjet za upis u drugu godinu su potpisi iz svih upisanih predmeta, znanstvenog kolokvija, seminara, položen seminar iz prve godine te položena dva pristupna ispita.
(2) U drugoj se godini upisuju napredni kolegiji, istraživački rad, jedan seminar i znanstveni kolokvij. Student upisuje i polaže napredne kolegije koji vrijede 16 ECTS bodova.

X.
(1) Uvjeti za upis u treću godinu studija su pisana preporuka mentora, seminar iz prethodne godine, potpis iz znanstvenog kolokvija i položeni napredni kolegiji u vrijednosti od barem 8 ECTS bodova.
(2) U trećoj godini studija upisuju se napredni kolegiji, izrada doktorske disertacije, jedan seminar i znanstveni kolokvij. Student upisuje i polaže napredne kolegije koji vrijede barem 8 ECTS bodova.

Završetak studija

XI.
(1) Studij završava obranom doktorskog rada (disertacije).

(2) Disertacija je pisani rad u kojem su izložena originalna matematička otkrića koja pripadaju autoru (dopušta se mogućnost da je autor dio tih otkrića već publicirao).
(3) Nacrt disertacije ne može se prijaviti prije nego što kandidat položi dva pristupna ispita.